

# 光電實驗(一)

## 實驗報告

姓	名：
學	號：
組	別：
教	授：
日	期：

### 一、實驗名稱：擴束與平行光束

### 二、實驗目的與原理：

#### (1) 實驗目的

使用氦氖雷射作為光源，透過透鏡組的架設與調整，將雷射光束調控成發散角度趨近於零且光束半徑較原雷射大的擴束平行光束，得出經過擴束系統前後的放大倍率，並使用刀口法量測雷射在傳播方向上的橫面強度分布，驗證其與高斯函數之關係，計算得出雷射光束半徑後再次驗證擴束系統的放大倍率。

#### (2) 實驗原理

##### 1. 高斯光束

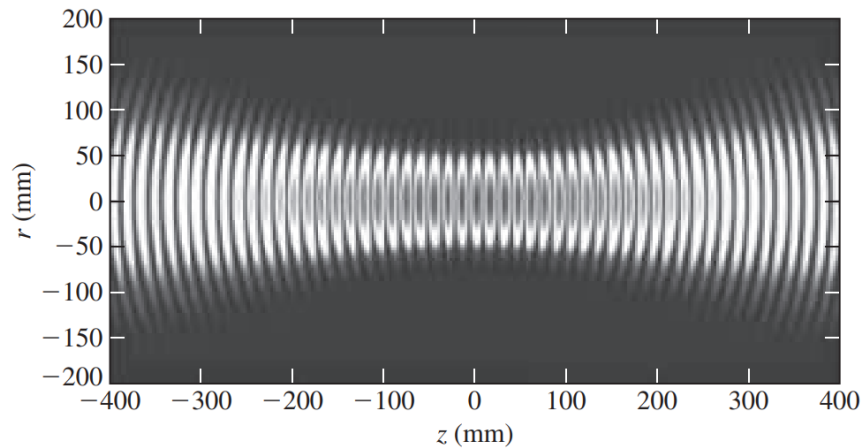
高斯光束是指橫向(面向量平行於光束傳播方向的橫面)方向的電場強度  $E$  以及幅照度  $I$  皆近似高斯函數分布的光束。

高斯光束可以透過下式建立模型：

$$E(r, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(\frac{-r^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-ikz - ik\frac{r^2}{2R(z)} + i\zeta(z)\right) \exp(i\omega t)$$

$$I(r, z) = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \exp\left(\frac{-2r^2}{w(z)^2}\right)$$

其中雷射會在傳播一定距離後逐漸收束在一光腰束位置，而後逐漸發散，如下圖一，故將  $z$  軸原點  $z=0$  處定義為光腰束的  $z$  軸位置。



圖一 高斯光束的瞬時幅照度[1]

其中上二式的參數分別代表以下意義：

- i.  $r$  表圓柱座標之徑向距離，以光軸中心為參考點。
- ii.  $z$  為圓柱座標之軸向距離，以光腰束位置為參考點。
- iii.  $k$  為波數(wave number)， $k = 2\pi/\lambda$ 。
- iv.  $E_0$  為光腰束中心位置之電場大小，即  $E_0 = |E(0, 0)|$ 。
- v.  $w(z)$  為  $z$  處的光束半徑，定義為在光束在  $z$  點時，電場振幅降到中心電場  $1/e$  處，幅照度降到  $1/e^2$  時的徑向距離。
- vi.  $w_0$  為光束的束腰寬度，即  $w_0 = w(0)$ 。
- vii.  $R(z)$  為光波波前的曲率半徑。
- viii.  $\zeta(z)$  為軸對稱光波的古伊相位移。

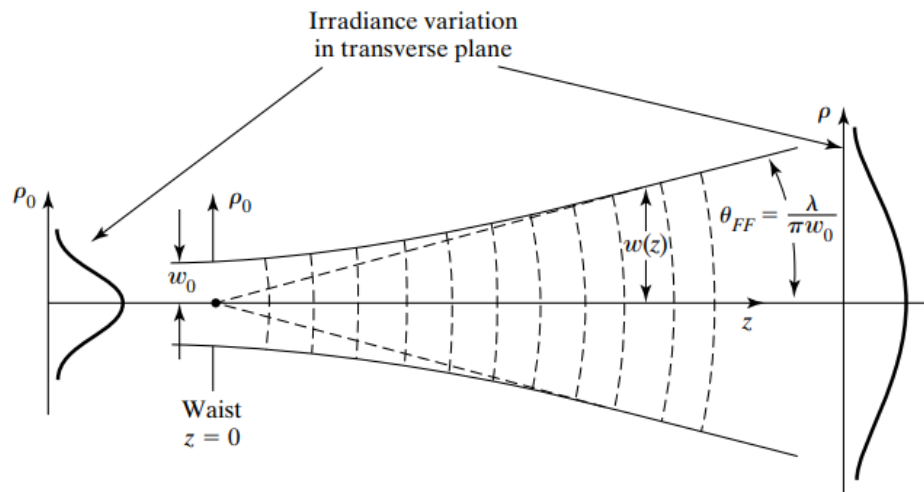
其中針對光束寬度  $w(z)$ ，有著以下關係：

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

其中  $z_R$  為瑞立距離，即  $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ ，而瑞立距離  $z_R$  代表著當  $z = z_R$

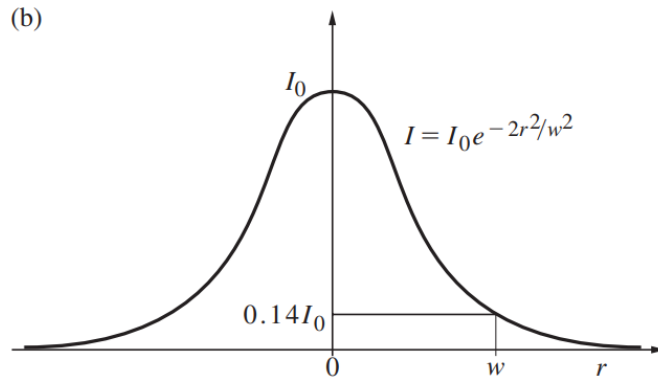
時， $w(\pm z_R) = \sqrt{2}w_0$ 。此外，觀察上式可發現， $w(z)$  為一雙曲線，故整理關係後可得下圖二，可發現在遠場時，光束寬度  $w(z)$  與  $z$  的關係近似一條直線，而聚焦於光束腰位置中心  $z = 0$  處，也因此可定義光束偏移

$\theta_{FF} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$ ， $\theta$  即為該直線與光軸間的夾角。



圖二 高斯光束在束腰位置之示意圖[2]

由於高斯光束可將電場振幅與幅照度以高斯函數表示，因此可以得知幅照度在橫面上應具有下圖三之分布，其中  $w$  處即代表著該點幅照度為中心  $I_0$  處之  $1/e^2$  倍，約為  $0.14I_0$ 。

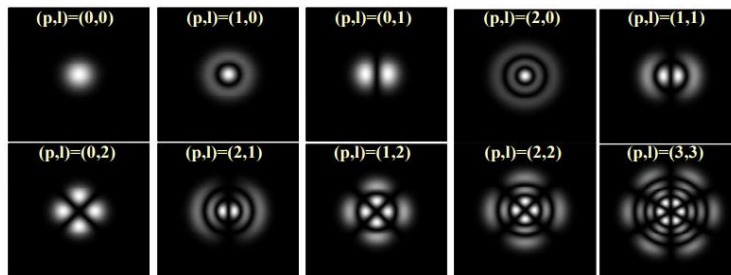


圖三 高斯光束的橫面之幅照度分布[1]

## 2. 雷射橫模模態

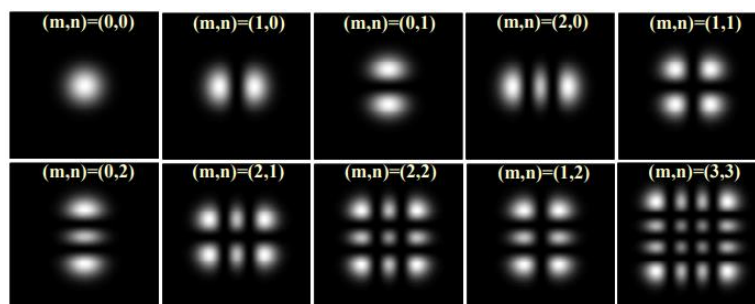
雷射橫模模態指雷射在傳播方向橫面上的電場振幅分布情形，其能以  $TEM_{pl}$  或  $TEM_{mn}$  表示，TEM 表示 transverse electromagnetic wave，而參數  $p$ 、 $l$ 、 $m$  和  $n$  則代表著該雷射橫面在極座標系或直角坐標系下，不同向量上的振幅節線數。當以極座標解析橫模分布時，將以拉蓋爾多項式表示，而若以直角座標系解析時，則以埃爾米特多項式表示。

當以極座標解析時，如下圖四所示，參數  $p$  代表著雷射在徑向方向上的節線數，可直觀理解為環形節線數量，而參數  $l$  代表著雷射在角度方向上的節線數，可直觀理解為直線節線數量。



圖四 以極座標解析雷射橫模[3]

當以直角座標解析時，如下圖五所示，參數  $m$  代表著雷射在  $x$  方向上的節線數，可直觀理解成直向節線數量，而參數  $n$  代表著雷射在  $y$  方向上的節線數，可直觀理解為橫向節線數量。



圖五 以直角座標解析雷射橫模[3]

透過觀察圖四與圖五可發現，TEM<sub>00</sub>的雷射為一圓形光點，我們將TEM<sub>00</sub>稱作基模，而基模雷射的幅照度符合高斯函數分布，故基模光束即為高斯光束，而基模雷射也是一般廣泛使用的雷射模態。

### 3. 刀口法

刀口法是將刀片逐漸沿著光束橫面移動，並且逐一量測不被刀片阻擋而可通過刀片的光強度，利用此方法可得之光強度在橫面分布的情形，並且據此推估光束在刀片位置的光束半徑  $w(z)$ 。

若使用刀口法量測的光束為高斯光束，則將刀片位於不同  $x$  點時所量測的光強度定義為  $I$ ，若將相鄰的光強度  $I$  相減，得光強度差  $\Delta I$ ，而其即為該相鄰微小距離內的光強度，並且將  $\Delta I$  對  $x$  作圖，應可得一高斯函數圖。

在計算時，雷射光束未被刀片阻擋，而可被量測到的光功率可以透過下式表示：

$$\begin{aligned} I(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{2P_0}{\pi w(z)^2} \exp\left(-\frac{2x^2 + 2y^2}{w(z)^2}\right) dx dy \\ &= P_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^{\infty} \frac{1}{w(z)} \exp\left(\frac{-2x^2}{w(z)^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} P_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{x}}{w(z)}\right) \end{aligned}$$

其中  $P_0$  為雷射功率， $\operatorname{erfc}()$  為誤差函數，因此若將刀片位於不同  $x$  點時所量測的光強度  $I$  對  $x$  作圖，所得圖形將為誤差函數。

此外，也可以由被刀片阻擋時測得的光強度  $I(x, z)$  與未被刀片阻擋時測得的總光強度(即雷射功率  $P_0$ )的能量比  $R(x, z)$  求得光束半徑  $w(z)$ ，能量比  $R(x, z)$  具下列關係：

$$R(x, z) = \frac{I(x, z)}{P_0} = \sqrt{\frac{2}{\pi w(z)^2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{-2x^2}{w(z)^2}\right) dx$$

當  $R=0.1$  時，代表有 90% 的能量未被刀片阻擋，將此時  $x$  點定為  $x_{10}$ ，當  $R=0.9$  時，代表有 90% 的能量未被刀片阻擋，將此時  $x$  點定為  $x_{90}$ ，故透過數值積分積分可得出  $w(z) \approx 0.7803(x_{90} - x_{10})$ ，因此可透過刀口法求得光束半徑  $w(z)$ 。

### 4. 高斯公式

在幾何光學中，可以利用造鏡者公式解析薄透鏡的行為：

$$\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = (n_l - n_e) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

上式中  $S_o$  表物距， $S_i$  表像距， $n_l$  表透鏡的折射率， $n_e$  表透鏡周遭環境的折射率， $R_1$  表透鏡前方表面的曲率半徑， $R_2$  表透鏡後方表面的曲率半徑。

使用造鏡者公式，即可在已知相關透鏡與環境的參數得知物距與像距的關係，此外，也可以透過造鏡者公式推得高斯公式。首先觀察上式，可發現當  $S_o$  趨近無窮大時， $\lim_{S_o \rightarrow \infty} \frac{1}{S_i} = (n_l - n_e) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ ，又已知當物距趨近無窮大時，可將入射光視為平行光，則光束將聚焦在像焦點  $f_i$  上，故  $\lim_{S_o \rightarrow \infty} \frac{1}{S_i} = (n_l - n_e) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f_i}$ ，又當  $S_i$  趨近無窮大時， $\lim_{S_i \rightarrow \infty} \frac{1}{S_o} = (n_l - n_e) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f_o}$ ，故對於薄透鏡而言，像焦點  $f_i$  等於物焦點  $f_o$ ，並將其定義為焦點  $f$ ，且可將造鏡者公式整理為下式：

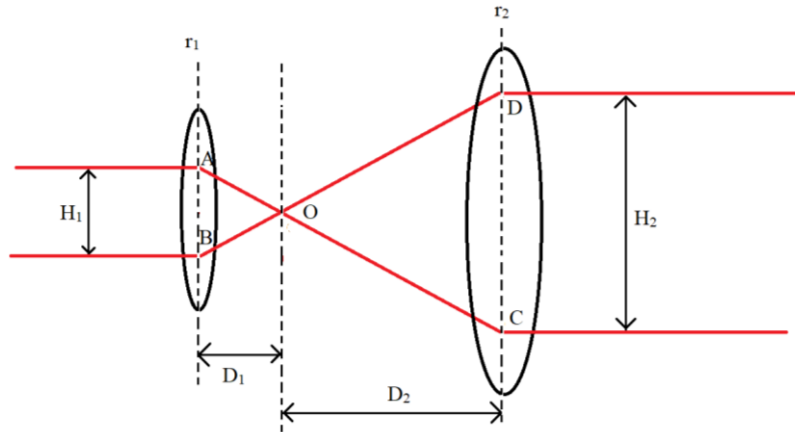
$$\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f}$$

此即為高斯公式。

## 5. 兩凸透鏡之擴束平行光

假定現有兩凸透鏡，擺放如下圖六，並欲以一平行光入射，且使得出射後方凸透鏡的光為一擴束平行光，即光束半徑較原光束半徑大的平行光束。假定前方凸透鏡的焦距為  $f_1$ ，後方凸透鏡焦距為  $f_2$ ，且將入射與出射前方凸透鏡的光路定為  $r_1$ ，將後方凸透鏡的光路定義為  $r_2$ ，則可套用高斯公式  $\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f}$  並發現，由於  $r_1$  入射光為平行光，故  $r_1$  的物距  $S_{o1}$  趨近無窮大，則  $r_1$  之像距  $S_{i1} = f_1$ ， $r_1$  出射光將會聚焦在前方凸透鏡後  $f_1$  距離上，此時考慮  $r_2$ ，由於  $r_2$  之出射光須為平行擴束光，故  $r_2$  的像距  $S_{i2}$  應趨近無窮大，則可得  $r_2$  之物距  $S_{o2}$  等於  $f_2$ ，則光束須從後方凸透鏡前  $f_2$  距離發散至後方凸透鏡，故觀察下圖可得知，當兩凸透鏡距離為  $D_1 + D_2 = f_1 + f_2$  時，若入射一平行光，則經過此雙凸透鏡的出射光也將恰為一平行光。

此外可發現三角形 OAB 與三角形 OCD 為相似三角形，因為兩三角形相似，故可得關係  $H_1 : D_1 = H_2 : D_2$ ，故可得放大倍率  $M_T$  的關係為  $M_T = \frac{H_2}{H_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{f_2}{f_1}$ ，此即為兩凸透鏡作為擴束平行光系統時的理論放大倍率。

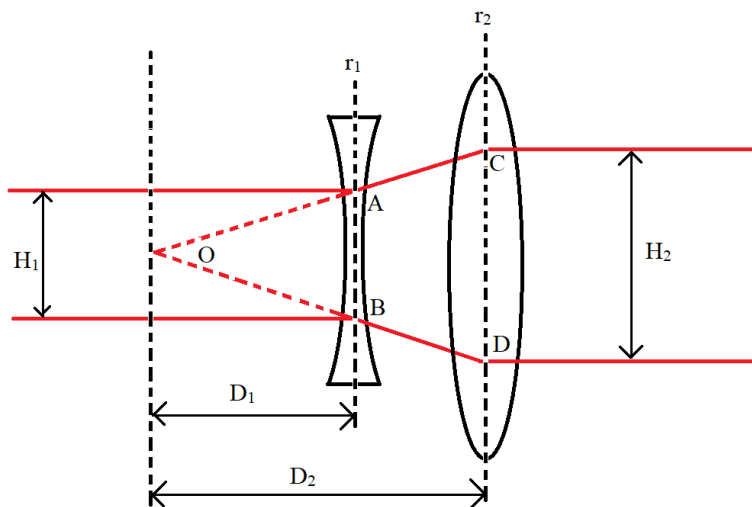


圖六 兩凸透鏡的擴束平行光

### 6. 一凹透鏡與一凸透鏡之擴束平行光

假定現有一凹凸鏡與一凸透鏡，擺放如下圖七，並欲以一平行光入射，且使得出射後方凸透鏡的光為一擴束平行光。假定前方凹透鏡的焦距為  $f_1$ ，且  $f_1 < 0$ ，後方凸透鏡焦距為  $f_2$ ， $f_2 > 0$ ，且將入射與出射前方凹透鏡的光路定為  $r_1$ ，將後方凸透鏡的光路定義為  $r_2$ ，則可與雙凸透鏡的擴束光系統以同樣方式推導，套用高斯公式  $\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f}$  發現，當兩透鏡距離為  $D_2 - D_1 = f_1 + f_2$  ( $f_1 < 0$ ) 時，若入射一平行光，則經過此擴束光系統的出射光也將恰為一平行光。

此外可發現三角形 OAB 與三角形 OCD 為相似三角形，因為兩三角形相似，故可得關係  $H_1 : D_1 = H_2 : D_2$ ，故可得放大倍率  $M_T$  的關係同為  $M_T = \frac{H_2}{H_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{f_2}{f_1}$ ，此即為一凹透鏡與一凸透鏡作為擴束平行光系統時的理論放大倍率。



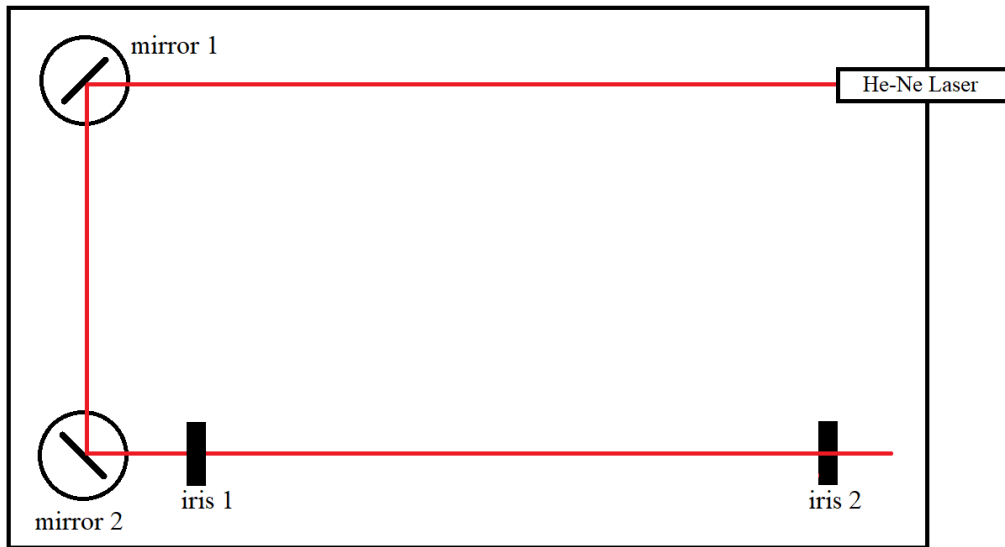
圖七 一凹透鏡與一凸透鏡的擴束平行光

透過上述不同情況的推導，可發現當兩透鏡平行排列時，不論是凹透鏡或是凸透鏡，只要兩透鏡具共焦點，且兩透鏡之距離  $D$  恰為兩透鏡焦距相加  $D = f_1 + f_2$ ，則此兩透鏡即可當作擴束平行光系統，且放大倍率

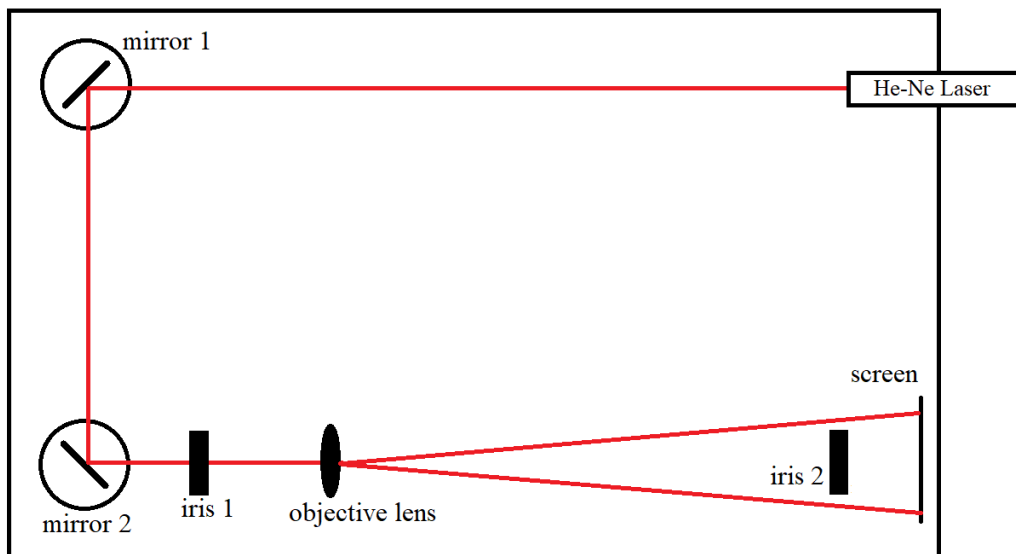
$$M_T \text{ 為 } M_T = \frac{f_2}{f_1}。$$

### 三、實驗步驟(含配置圖)：

首先在光學桌板邊緣建立雷射水平，接著透過兩面反射鏡調整光路，使其通過兩個平行並縮至最小的光圈，如下圖八。接著如下圖九，在兩面光圈間放置物鏡，並在尾端架設屏幕，透過對齊物鏡在光圈一上的反射點和調整物鏡出射光對光圈二在屏幕上的投影以調整物鏡位置，觀察屏幕上的成像。

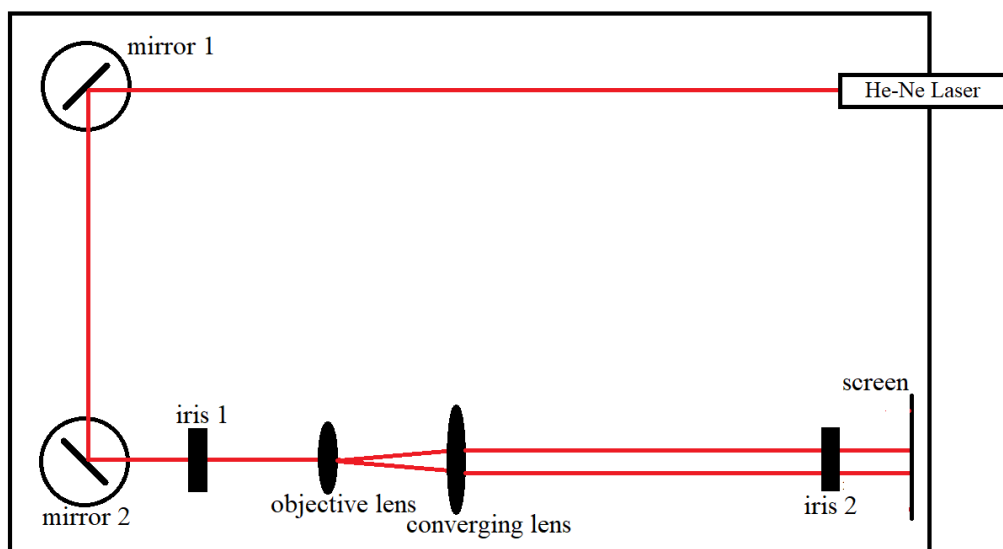


圖八 使雷射通過兩個平行光圈示意圖



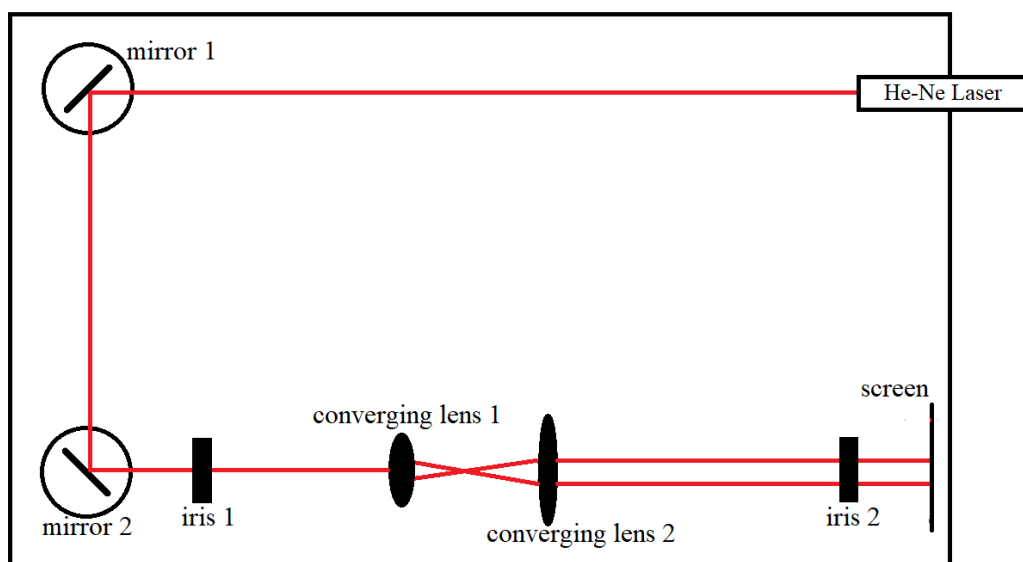
圖九 在兩面反射鏡間架設物鏡示意圖

接著如下圖十，在物鏡後加入一焦距為 150mm 的凸透鏡，打開光圈二，並調整凸透鏡位置使得出射光束不再發散，可移動屏幕檢查光束在屏幕上的投影大小以確認發散情形。得到擴束平行光後，量測入射物鏡前的光點直徑與擴束光束的光束直徑，計算得出實驗放大倍率，透過物鏡與凸透鏡的焦距得出理論放大倍率並比較兩者，此外紀錄物鏡與凸透鏡間的距離。



圖十 以物鏡與凸透鏡架設擴束平行光束示意圖

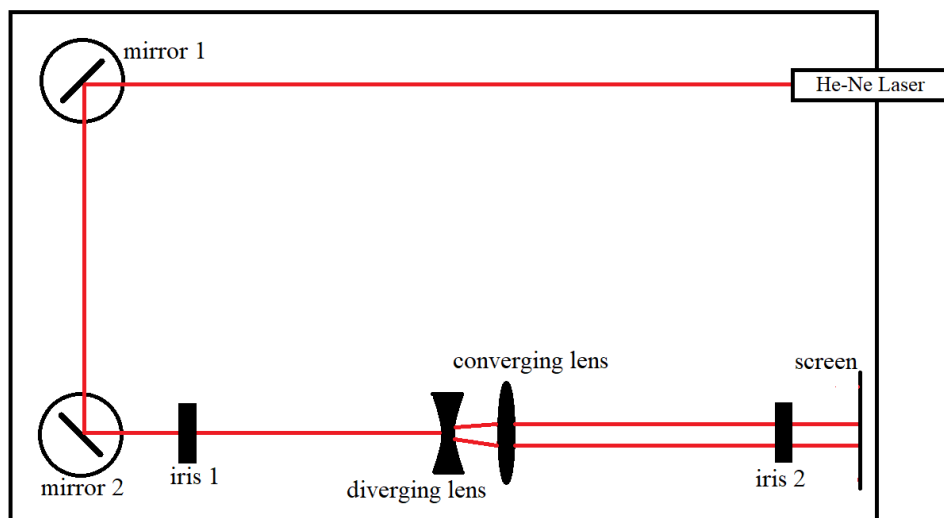
將上圖十的物鏡與凸透鏡替換成焦距為 150mm 和 250mm 的凸透鏡，其餘設備保持不動，如下圖十一。調整兩凸透鏡的位置，並使其出射光為擴束平行光，量測擴束光束的光束直徑並得出實驗放大倍率，透過兩凸透鏡焦距得出理論放大倍率並比較兩者，此外紀錄兩凸透鏡間的距離。



圖十一 以兩凸透鏡架設擴束平行光束示意圖

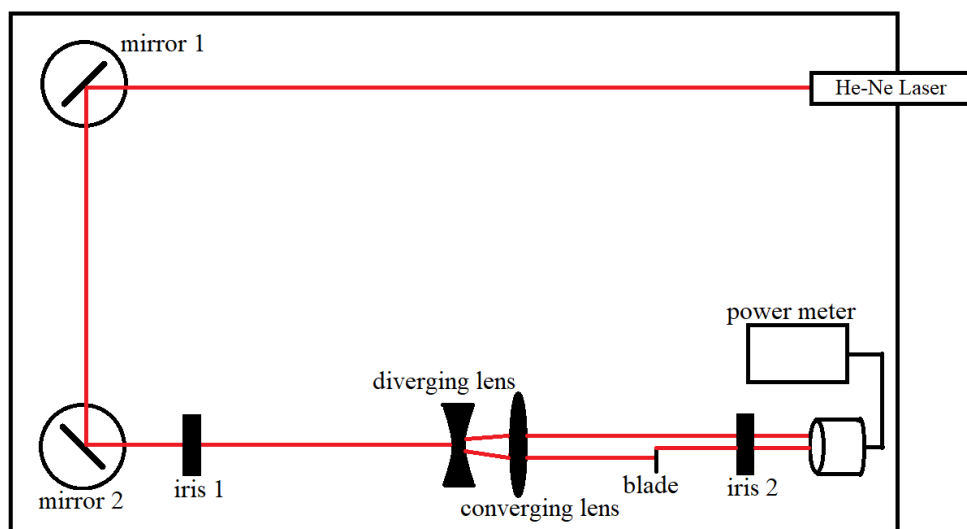


將上圖十一的兩凸透鏡替換成焦距為-100mm 的凹透鏡和 150mm 的凸透鏡，其餘設備保持不動，如下圖十二。調整兩透鏡的位置，並使其出射光為擴束平行光，量測擴束光束的光束直徑並得出實驗放大倍率，透過兩透鏡焦距得出理論放大倍率並比較兩者，此外紀錄兩透鏡間的距離。



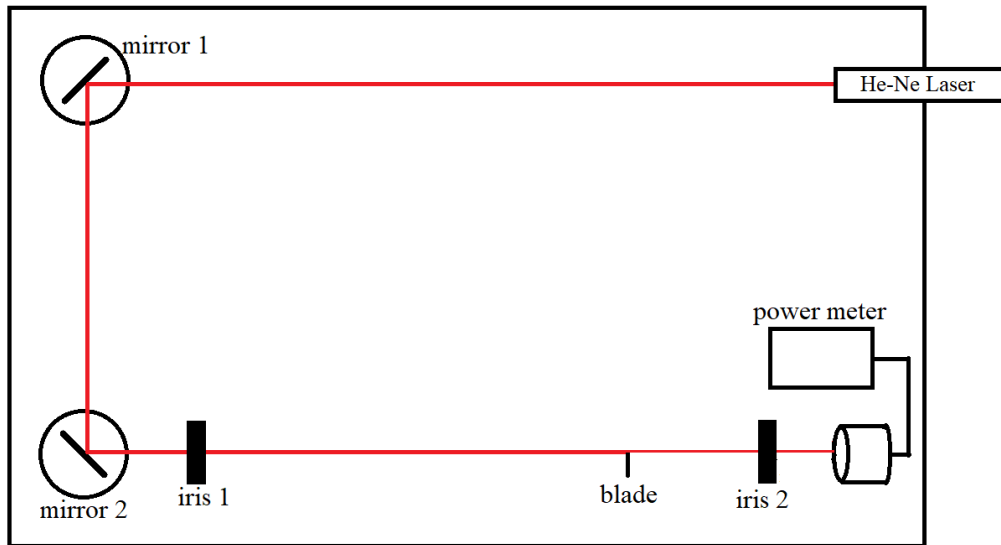
圖十二 以凹透鏡與凸透鏡架設擴束平行光束示意圖

將上圖十二的屏幕移除，並架設光度計，且在凸透鏡後以精密雙軸平台架設刀片，置於凸透鏡與光圈二間，利用刀口法量測擴束平行光束的橫場光強度分布，如下圖十三。首先量測未經過刀片的擴束光束光強度，紀錄後透過雙軸平台調整刀片切入距離，使得光強度為原光強度的 90%，之後將刀片後退約 1.4mm 至 1.6mm，將此點定為刀片位移 0 點，紀錄此時的光強度，接著逐次將刀片前移 0.2mm，並且量測刀片位於該點時的光強度  $I$ ，且求得上一個紀錄點的光強度與此次的光強度之光強度差  $\Delta I$ ，紀錄直至光點幾乎被全部遮蔽，將刀片位移與光強度差  $\Delta I$  作圖，驗證其圖形與高斯函數間的關係。



圖十三 以刀口法量測擴束平行光束的光強度分布

移除凹透鏡與凸透鏡，利用刀口法量測雷射光束的橫場光強度分布，如下圖十四。首先量測未經過刀片的雷射光束光強度，紀錄後透過雙軸平台調整刀片切入距離，使得光強度為原光強度的 90%，之後將刀片後退約 0.7mm 至 0.8mm，將此點定為刀片位移 0 點，紀錄此時的光強度，接著逐次將刀片前移 0.1mm，並且量測刀片位於該點時的光強度  $I$ ，且求得上個紀錄點的光強度與此次的光強度之光強度差  $\Delta I$ ，紀錄直至光點幾乎被全部遮蔽，將刀片位移與光強度差  $\Delta I$  作圖，驗證其圖形與高斯函數間的關係。



圖十四 以刀口法量測雷射光束的光強度分布

#### 四、數據分析與討論：

##### (1) 實驗數據整理及分析

表一 擴束系統為物鏡與凸透鏡之實驗數據

物鏡焦距 (mm)	凸透鏡焦距 (mm)	兩元件之間距 (mm)	理論間距 (mm)	元件間距 誤差(%)
15.8	150	152	165.8	8.323

表二 擴束系統為物鏡與凸透鏡之實驗數據

入射擴束平行光系統前 的雷射光點直徑(mm)	成像光點直 徑(mm)	量測 倍率	理論 倍率	放大倍率誤差(%)
2.1	20.1	9.57	9.49	0.843

表三 擴束系統為兩個凸透鏡之實驗數據

凸透鏡 1 焦距 (mm)	凸透鏡 2 焦 距(mm)	兩元件之間距 (mm)	理論間距 (mm)	元件間距 誤差(%)
150	250	413	400	3.25

表四 擴束系統為兩個凸透鏡之實驗數據

入射擴束平行光系統前的雷射光點直徑(mm)	成像光點直徑(mm)	量測倍率	理論倍率	放大倍率誤差(%)
2.1	3.5	1.67	1.67	0

表五 擴束系統為一個凹透鏡與一個凸透鏡之實驗數據

凹透鏡焦距(mm)	凸透鏡焦距(mm)	兩元件之間距(mm)	理論間距(mm)	元件間距誤差(%)
-100	150	54	50	8

表六 擴束系統為一個凹透鏡與一個凸透鏡之實驗數據

入射擴束平行光系統前的雷射光點直徑(mm)	成像光點直徑(mm)	量測倍率	理論倍率	放大倍率誤差(%)
2.1	3.2	1.52	1.5	1.34

在理想上，假定原雷射光束為平行光束，則若欲將圖十、圖十一和圖十二中的物鏡、凸透鏡和凹透鏡組合作為擴束平行光系統，則兩透鏡間的元件間距  $D$  必須為兩透鏡焦距相加，即  $D = f_1 + f_2$ ，且放大倍率  $M_T = \frac{f_2}{f_1}$ 。

透過表一與表二可知，在圖十中，物鏡與凸透鏡的理論元件間距應為 165.8mm，理論放大倍率為 9.49 倍，與實驗數據相比，放大倍率誤差為 0.843%，元件間距誤差為 8.323%。

透過表三與表四可知在圖十一中，兩個凸透鏡的理論元件間距應為 400mm，理論放大倍率為 1.67 倍，與實驗數據相比，放大倍率誤差為 0%，元件間距誤差為 3.25%。

透過表五與表六可知在圖十二中，一個凹透鏡與一個凸透鏡的理論元件間距應為 50mm，理論放大倍率為 1.5 倍，與實驗數據相比，放大倍率誤差為 1.34%，元件間距誤差為 8%。

表七 光度計置於凸透鏡後方所量測之第一次的光強度分佈

刀片位 移(mm)	I(mW)	$\Delta I(\mu\text{W})$	R(%)	刀片位 移(mm)	I(mW)	$\Delta I(\mu\text{W})$	R(%)
0	1.613	0	100	2.8	0.66	185	40.918
0.2	1.613	0	100	3	0.498	162	30.874
0.4	1.612	1	99.938	3.2	0.3445	153.5	21.358
0.6	1.609	3	99.752	3.4	0.2187	125.8	13.559
0.8	1.604	5	99.442	3.6	0.1374	81.3	8.5183
1	1.592	12	98.698	3.8	0.0771	60.3	4.7799
1.2	1.565	27	97.024	4	0.0434	33.7	2.6906
1.4	1.527	38	94.668	4.2	0.0205	22.9	1.2709
1.6	1.457	70	90.329	4.4	0.0107	9.8	0.6634
1.8	1.351	106	83.757	4.6	0.0052	5.5	0.3224
2	1.296	55	80.347	4.8	0.00242	2.78	0.15
2.2	1.188	108	73.652	5	0.00128	1.14	0.0794
2.4	1.031	157	63.918	5.2	0.00072	0.56	0.0446
2.6	0.845	186	52.387	5.4	0.00047	0.25	0.0291

表八 光度計置於凸透鏡後方所量測之第二次的光強度分佈

刀片位 移(mm)	I(mW)	$\Delta I(\mu\text{W})$	R(%)	刀片位 移(mm)	I(mW)	$\Delta I(\mu\text{W})$	R(%)
0	1.612	0	100	2.6	1.164	138	72.208
0.2	1.612	0	100	2.8	0.981	183	60.856
0.4	1.61	2	99.876	3	0.795	186	49.318
0.6	1.61	0	99.876	3.2	0.627	168	38.896
0.8	1.607	3	99.690	3.4	0.444	183	27.543
1	1.603	4	99.442	3.6	0.3119	132.1	19.349
1.2	1.591	12	98.697	3.8	0.1942	117.7	12.047
1.4	1.573	18	97.581	4	0.1174	76.8	7.2829
1.6	1.546	27	95.906	4.2	0.0668	50.6	4.1439
1.8	1.506	40	93.424	4.4	0.0342	32.6	2.1216
2	1.445	61	89.640	4.6	0.0181	16.1	1.1228
2.2	1.411	34	87.531	4.8	0.00875	9.35	0.5428
2.4	1.302	109	80.769	-	-	-	-

表九 移除凹透鏡與凸透鏡後所量測之第一次的光強度分佈

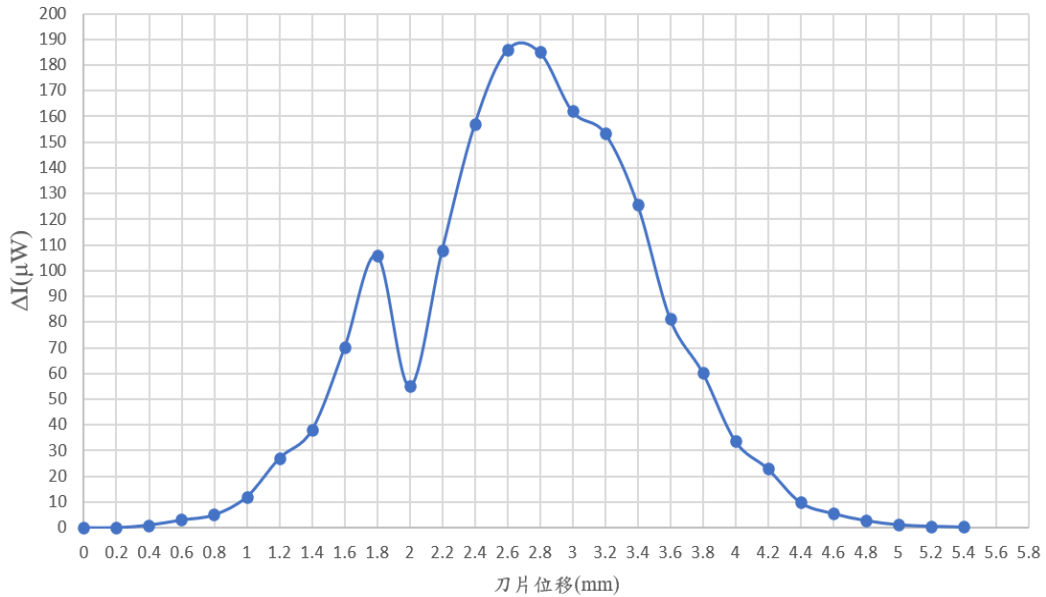
刀片位 移(mm)	I(mW)	$\Delta I(\mu\text{W})$	R(%)	刀片位 移(mm)	I(mW)	$\Delta I(\mu\text{W})$	R(%)
0	1.98	0	100	1.5	0.655	160	33.081
0.1	1.97	10	99.495	1.6	0.496	159	25.051
0.2	1.965	5	99.242	1.7	0.354	142	17.879
0.3	1.943	22	98.131	1.8	0.2255	128.5	11.389
0.4	1.925	18	97.222	1.9	0.1525	73	7.702
0.5	1.907	18	96.313	2	0.1009	51.6	5.096
0.6	1.878	29	94.849	2.1	0.0654	35.5	3.303
0.7	1.83	48	92.424	2.2	0.03716	28.24	1.8768
0.8	1.762	68	88.990	2.3	0.02068	16.48	1.0444
0.9	1.67	92	84.343	2.4	0.01136	9.32	0.5737
1	1.54	130	77.778	2.5	0.00577	5.59	0.2914
1.1	1.394	146	70.404	2.6	0.00317	2.6	0.1601
1.2	1.222	172	61.717	2.7	0.00129	1.88	0.0652
1.3	1.022	200	51.616	2.8	0.00055	0.74	0.0278
1.4	0.815	207	41.162	2.9	0.00028	0.27	0.0141

表十 移除凹透鏡與凸透鏡後所量測之第二次的光強度分佈

刀片位 移(mm)	I(mW)	$\Delta I(\mu\text{W})$	R(%)	刀片位 移(mm)	I(mW)	$\Delta I(\mu\text{W})$	R(%)
0	1.955	0	100	1.5	0.682	179	34.885
0.1	1.955	0	100	1.6	0.501	181	25.627
0.2	1.955	0	100	1.7	0.3528	148.2	18.046
0.3	1.954	1	99.949	1.8	0.2496	103.2	12.767
0.4	1.944	10	99.437	1.9	0.1762	73.4	9.0128
0.5	1.927	17	98.568	2	0.1154	60.8	5.9028
0.6	1.893	34	96.829	2.1	0.0674	48.0	3.4476
0.7	1.837	56	93.964	2.2	0.0381	29.3	1.9488
0.8	1.763	74	90.179	2.3	0.02154	16.56	1.1018
0.9	1.68	83	85.934	2.4	0.01285	8.69	0.6573
1	1.567	113	80.154	2.5	0.00712	5.73	0.3642
1.1	1.399	168	71.560	2.6	0.00326	3.86	0.1668
1.2	1.205	194	61.637	2.7	0.0014	1.86	0.0716
1.3	1.031	174	52.737	2.8	0.00068	0.72	0.0348
1.4	0.861	170	44.041	2.9	0.00034	0.34	0.0174

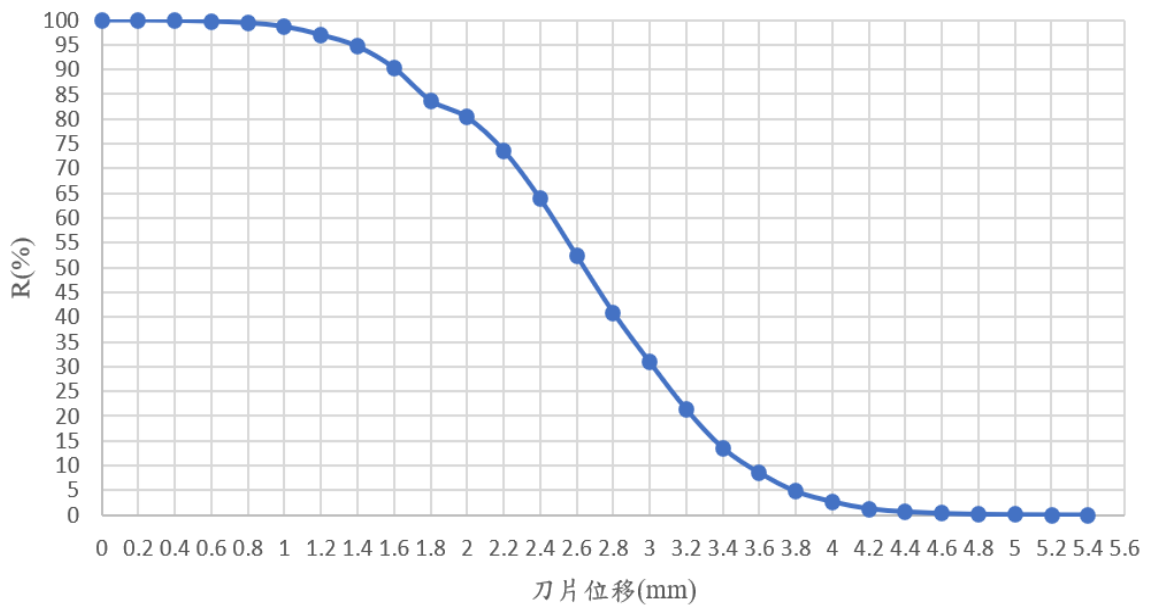
在以刀口法量測光強度分布的實驗中，我們對兩種實驗情形各量測了兩次，而以下分別為各表之作圖：

光度計置於凸透鏡後方所量測之第一次的 $\Delta I$ 分佈



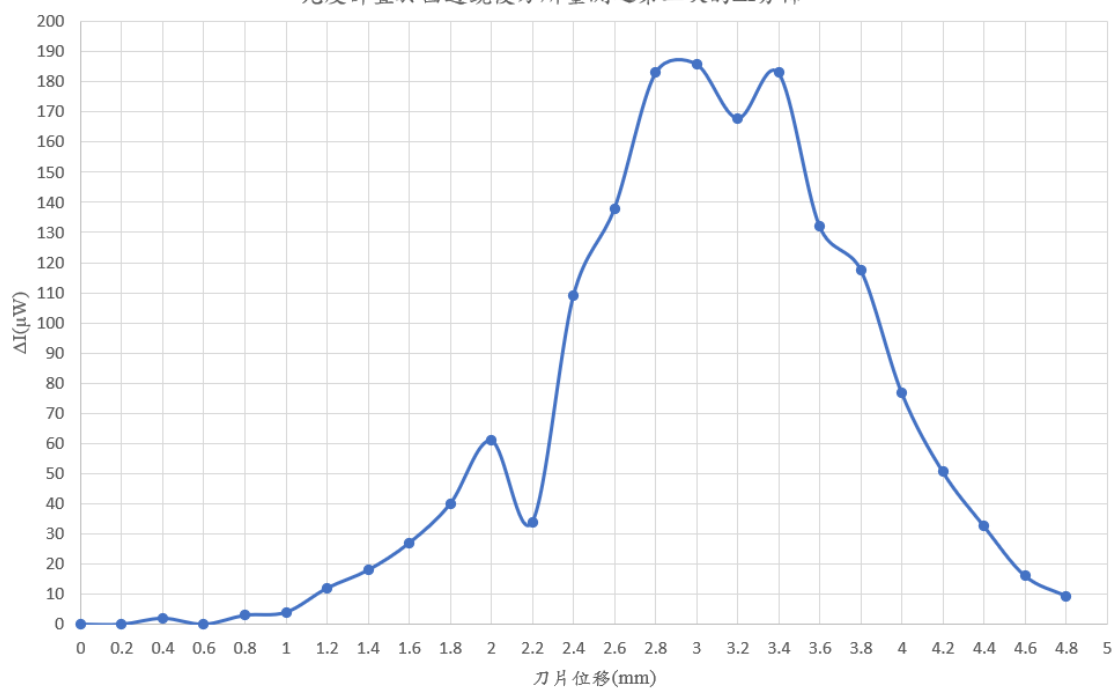
圖十五 光度計置於凸透鏡後方所量測之第一次的  $\Delta I$  分佈

光度計置於凸透鏡後方所量測之第一次R分佈



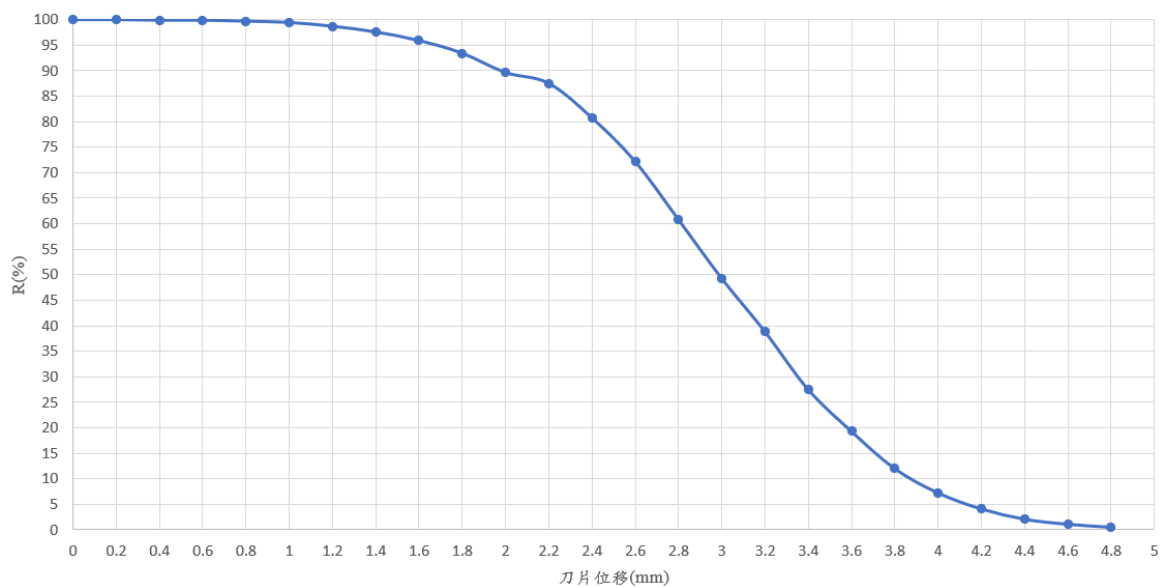
圖十六 光度計置於凸透鏡後方所量測之第一次的 R 分佈

光度計置於凸透鏡後方所量測之第二次的 $\Delta I$ 分佈



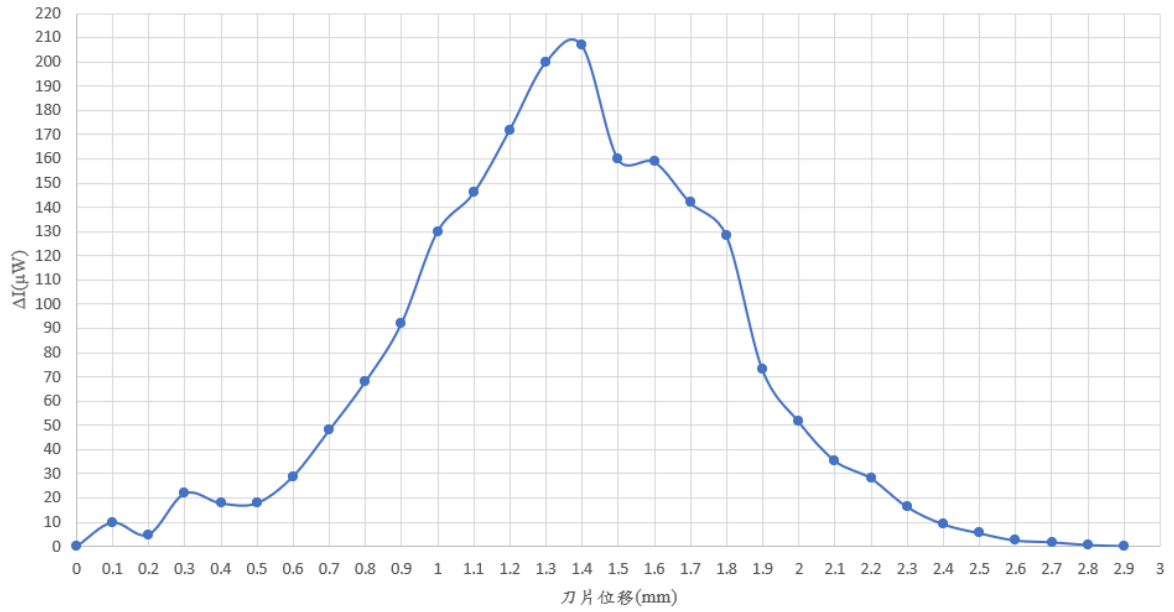
圖十七 光度計置於凸透鏡後方所量測之第二次的  $\Delta I$  分佈

光度計置於凸透鏡後方所量測之第二次的R分佈



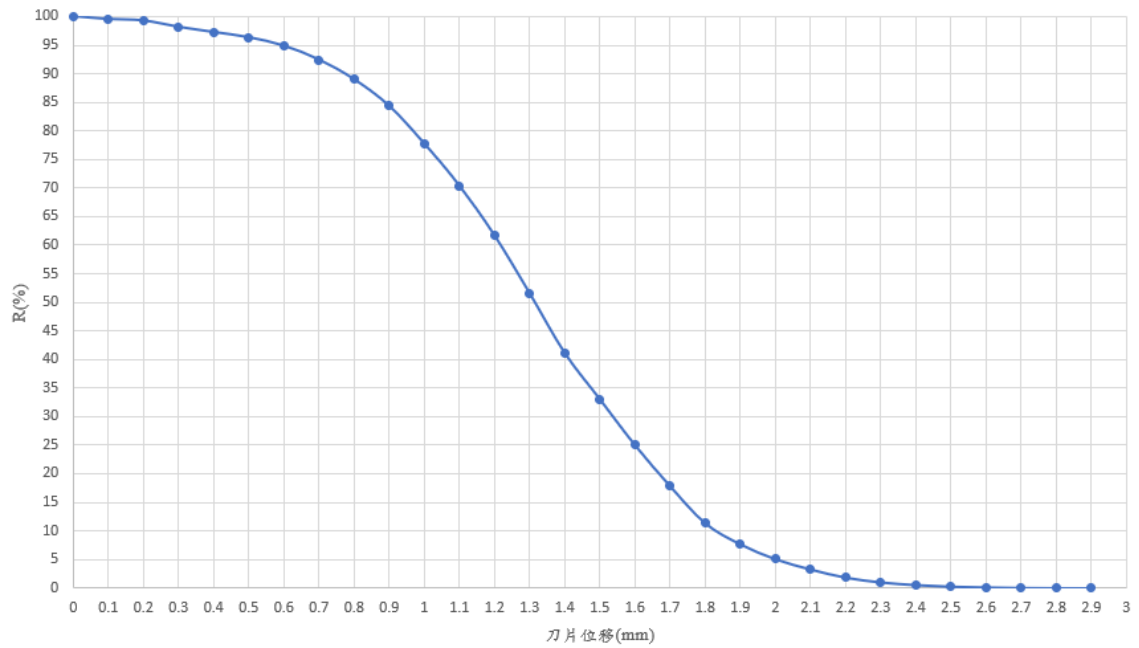
圖十八 光度計置於凸透鏡後方所量測之第二次的 R 分佈

移除凹透鏡與凸透鏡後所量測之第一次的 $\Delta I$ 分佈



圖十九 移除凹透鏡與凸透鏡後所量測之第一次的  $\Delta I$  分佈

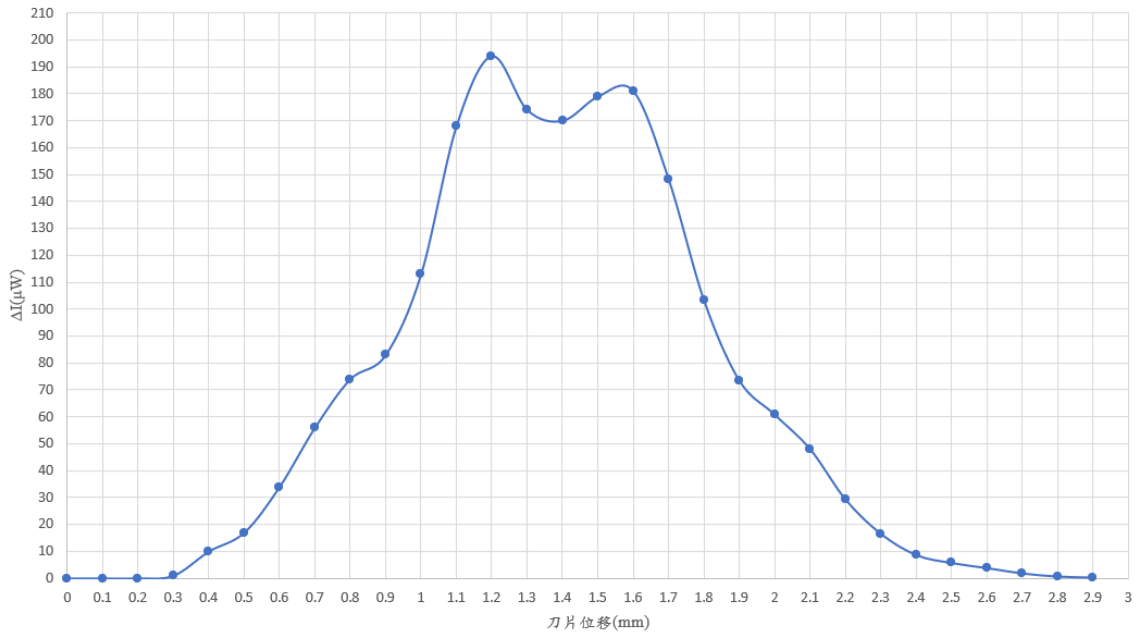
移除凹透鏡與凸透鏡後所量測之第一次的R分佈



圖二十 移除凹透鏡與凸透鏡後所量測之第一次的 R 分佈

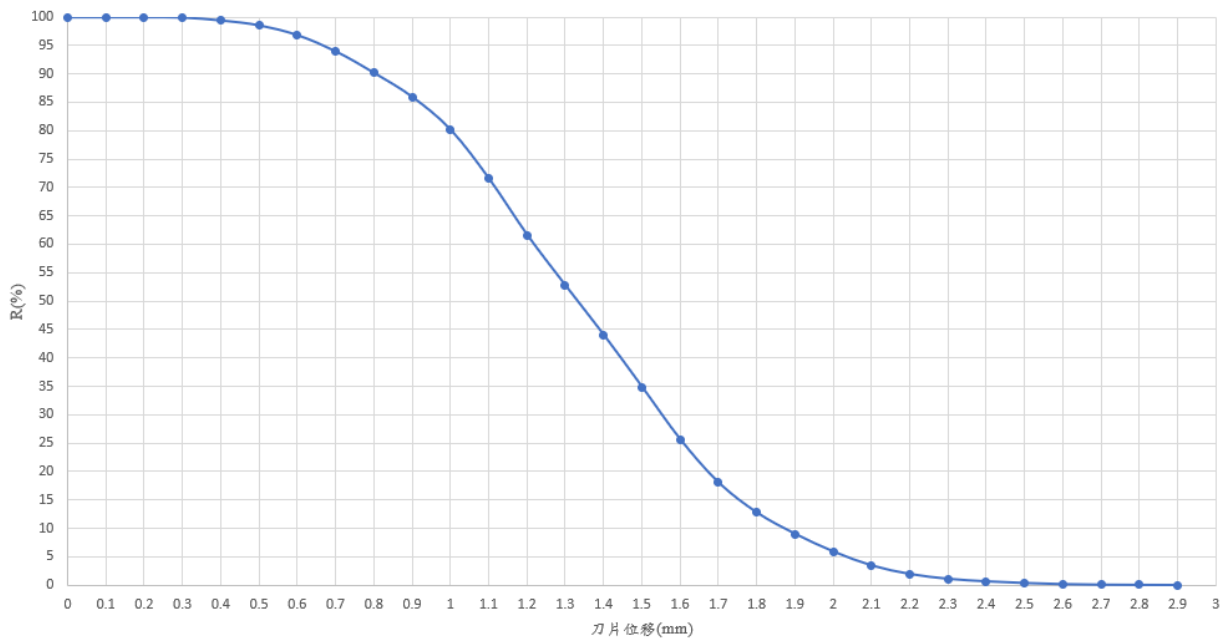


移除凹透鏡與凸透鏡後所量測之第二次的 $\Delta I$ 分佈



圖二十一 移除凹透鏡與凸透鏡後所量測之第二次的  $\Delta I$  分佈

移除凹透鏡與凸透鏡後所量測之第二次的R分佈



圖二十二 移除凹透鏡與凸透鏡後所量測之第二次的 R 分佈

由於本實驗所使用的氦氖雷射屬於基模雷射，故其光束能以高斯函數表示，也因此可知若將  $\Delta I$  對刀片位移  $x$  作圖，可得一高斯函數圖，且將能量比例  $R$  對刀片位移  $x$  作圖，可得一誤差函數圖。

經由下式，可以透過 R 在 90% 時的 x 值 ( $x_{90}$ )，與 R 在 10% 時的 x 值 ( $x_{10}$ )，得出雷射在刀片位置上的光束半徑  $w(z)$ 。

$$w \approx 0.7803(x_{10} - x_{90})$$

若在上表七、表八、表九和表十中直接選取距離 R = 90% 與 R = 10% 最近的點，則可得下表十一。

表十一 擴束光束與原雷射光束的光束半徑

	X90	X10	w
擴束光束的第一次量測	1.6	3.6	1.5606
擴束光束的第二次量測	2	3.8	1.40454
原雷射光束的第一次量測	0.8	1.8	0.7803
原雷射光束的第二次量測	0.8	1.9	0.85833

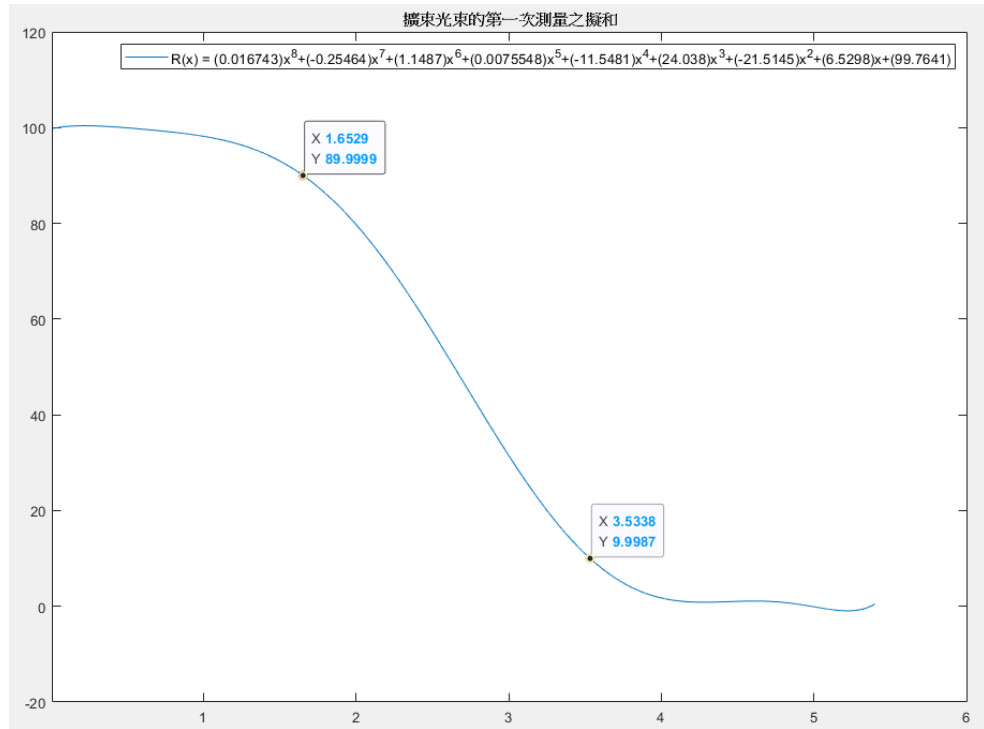
但由於測量點之間的範圍過大，可能導致誤差，故使用 matlab 對以上各表的 x 值與 R 值做最小平方方法的 8 次方多項式擬和，並對擬和後函數的 x 值以 0.0001mm 之間隔取點，得擬和後  $R_{fit}$  值與 R = 90% 和 R = 10% 的差距在 0.001 間。對表七作圖的程式碼如下圖二十三，而由於 x 取點過為密集，故針對表七的擬合從  $x = 1.65$  至  $x = 1.66$  放大檢視，顯示資料取點與曲線之關係。最後，可得出以下不同實驗數據的擬合圖。

```

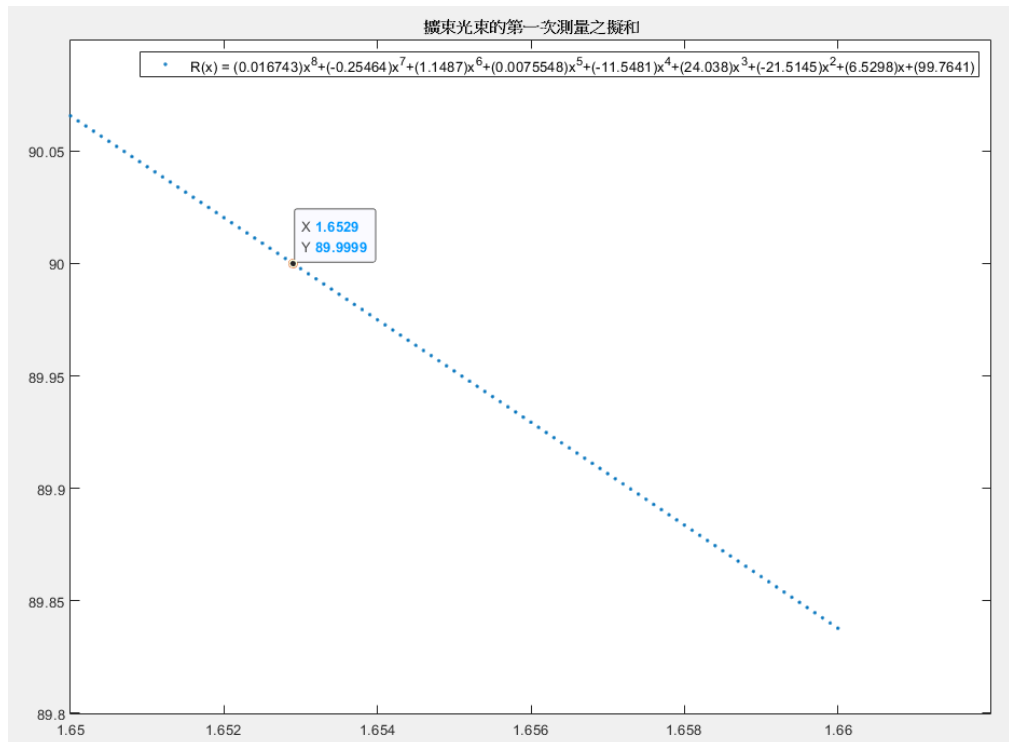
num = xlsread('D:\課程\光電實驗\實驗三\R1-1.xlsx', 1, 'A1:B28');
x = num(:, 1); %刀片位移量
y = num(:, 2); %R(x)之實驗值
p = polyfit(x, y, 8); %以最小平方方法做8次方多項式擬合
xfit = (0:0.0001:x(length(x))); %以0.0001間距設x點
yfit = p(1).*xfit.^8 + p(2).*xfit.^7+p(3).*xfit.^6+...
p(4).*xfit.^5+p(5).*xfit.^4+p(6).*xfit.^3+p(7).*xfit.^2+p(8).*xfit+p(9); %擬合R(x)值
x90 = find(abs(yfit-90) < 1e-2); %X90位置在向量xfit中符合條件的位置
X90 = x90(ceil(length(x90)/2)); %取中間點作為X90
x10 = find(abs(yfit-10) < 1e-2); %X10位置在向量xfit中符合條件的位置
X10 = x10(ceil(length(x10)/2)); %取中間點作為X10
plot(xfit, yfit, xfit(X90), yfit(X90), 'o', xfit(X10), yfit(X10), 'o')
%擬合線作圖並標出X90、X10位置與R(X90)、R(X10)
title('原雷射光束的第一次測量之擬和'); %圖表標題
legend(strcat('R(x) = (', num2str(p(1)), ')x^8+(', num2str(p(2)), ')x^7+( ' ...
, num2str(p(3)), ')x^6+(', num2str(p(4)), ')x^5+( ' ...
num2str(p(5)), ')x^4+(', num2str(p(6)), ')x^3+(', num2str(p(7)), ' ...
')x^2+(', num2str(p(8)), ')x+(', num2str(p(9)), ') ' )', 'FontSize', 10);
%顯示擬合方程

```

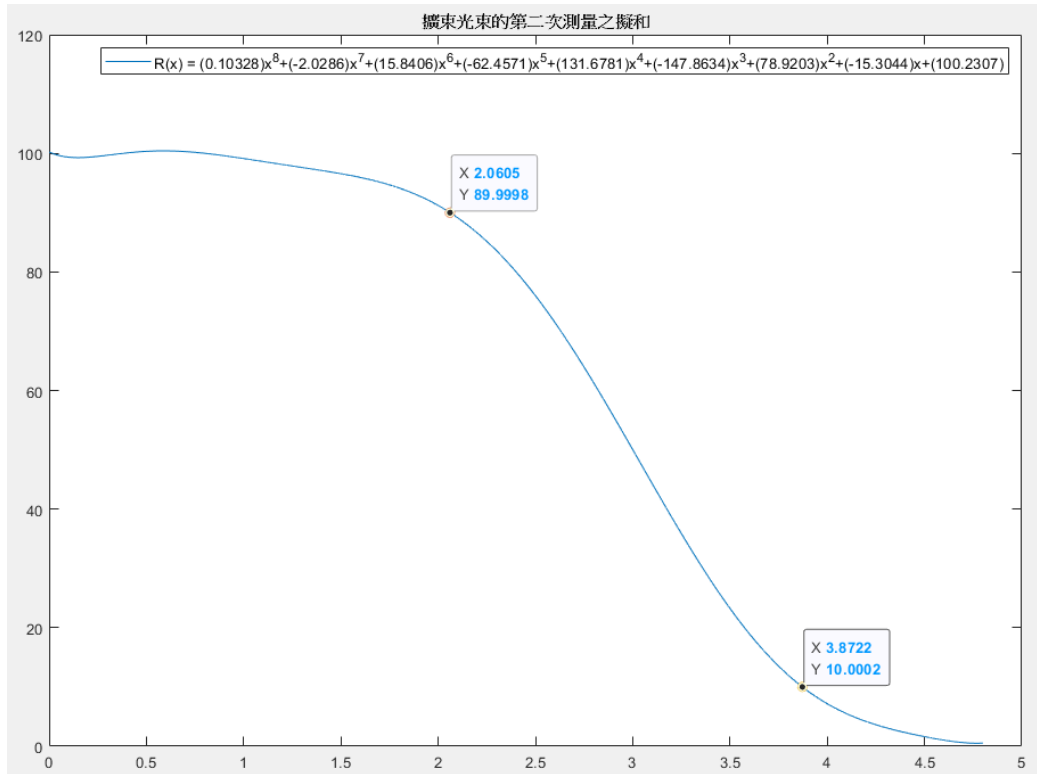
圖二十三 對表七做擬合圖並找點  $X_{90}$  與  $X_{10}$  之程式碼



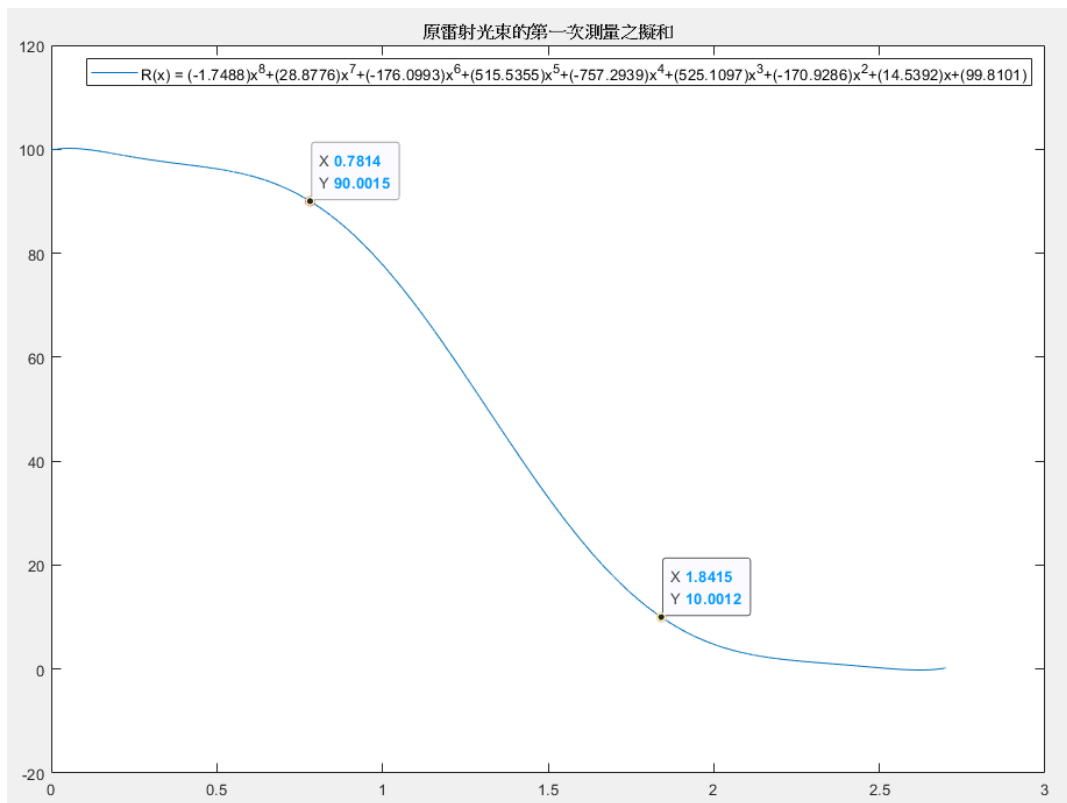
圖二十四 擴束光束的第一次測量之擬和



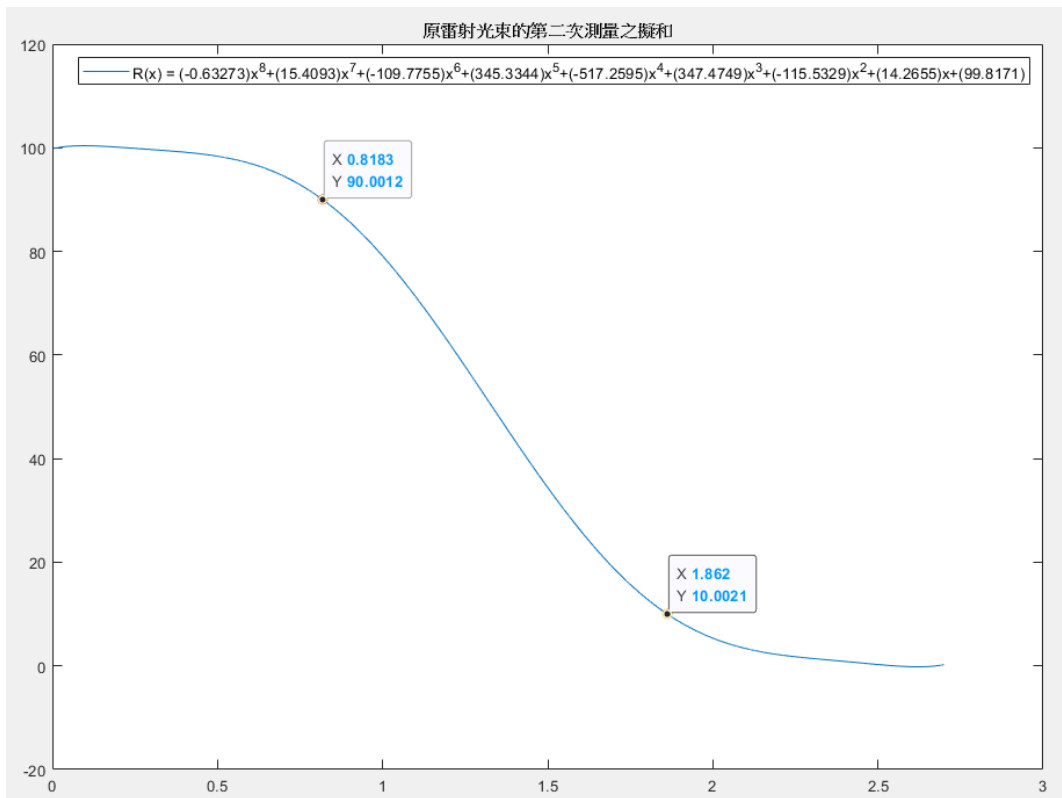
圖二十五 擴束光束的第一次測量之  $x = 1.65$  至  $x = 1.66$  的擬和



圖二十六 擴束光束的第二次測量之擬和



圖二十七 原雷射光束的第一次測量之擬和



圖二十八 原雷射光束的第二次測量之擬合

將上列擬合圖與數據整理可得下表十二：

表十二 擴束光束與原雷射光束的光束半徑

	X90	X10	W
擴束光束的第一次量測	1.6529	3.5338	1.4677
擴束光束的第二次量測	2.0605	3.8722	1.4137
原雷射光束的第一次量測	0.7814	1.8415	0.8272
原雷射光束的第二次量測	0.8183	1.862	0.8144

若根據實驗數據圖十五、圖十七、圖十九和圖二十一與高斯函數的相似性，可以選出圖十五與圖二十一做為最佳的數據組合，而其分別為擴束光束的第一次量測與原雷射光束的第二次量測，以表十二可求得這兩次測量之間的放大倍率為 1.8022，與理論值 1.5 的誤差為 20.147%。

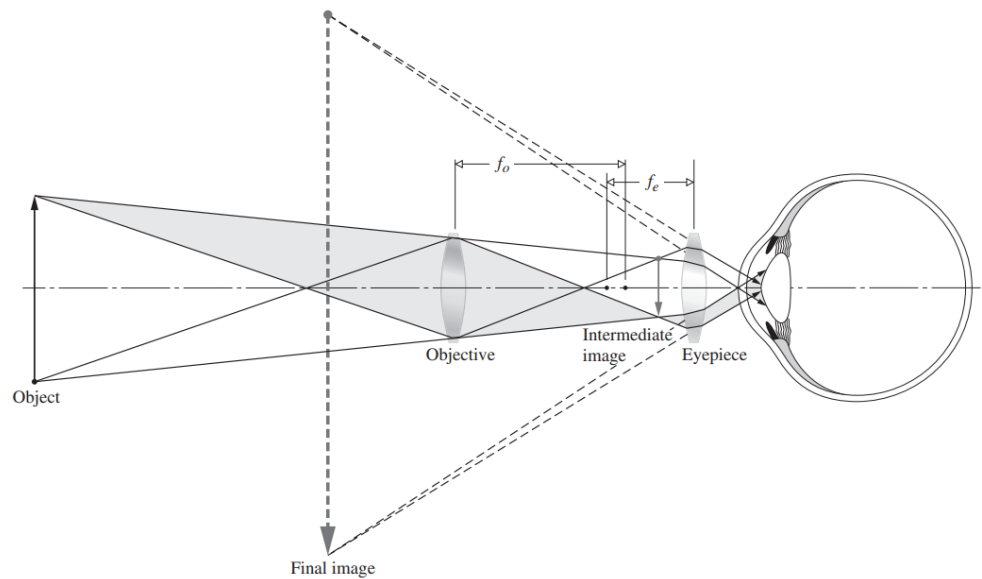
若根據表十二對各種組合進行計算，可以求得擴束光束的第二次量測與原雷射光束的第一次量測做為數據組合時，其放大倍率 1.709 最為接近理論放大倍率 1.5，誤差為 13.933%。

(2) 預報題目作答

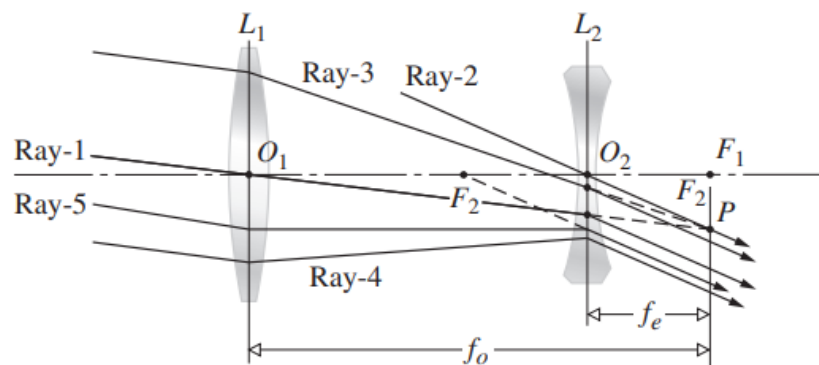
1. 描述及解釋 Keplerian telescope 與 Galilean telescope 的基本結構及成像結果。他們除了有望遠的功能外，還有哪一種實驗上經常使用的功能？

答：下圖二十九即為 Keplerian telescope，是以兩片凸透鏡所組成的望遠鏡，物體透過物鏡成像於物鏡與目鏡間，形成一個倒立實像，而該倒立實像再經由目鏡形成放大正立虛像，故對於原物體而言即為放大倒立虛像。

而下圖三十則為 Galilean telescope，是以一片凸透鏡與一片凹透鏡所組成，物體透過凸透鏡(物鏡)在凹透鏡(目鏡)後(右側)形成一倒立實像，接著該倒立實像再透過凹透鏡形成一放大倒立的虛像，故對於原物體而言即成放大正立虛像。



圖二十九 Keplerian telescope[4]



圖三十 Galilean telescope[4]

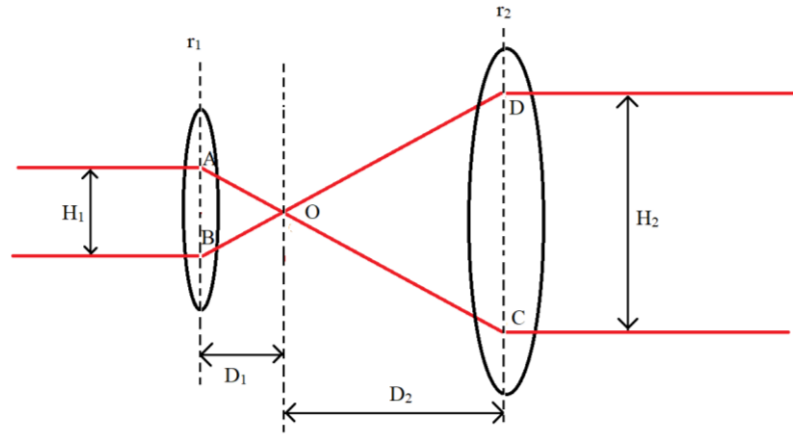
上述兩種望遠鏡除了望遠功能外，也可以調整兩透鏡間距，改為在實驗中建立平行光束。

2. 參考「實驗內容」中所使用的擴束方法，其放大倍率如何理論計算之？

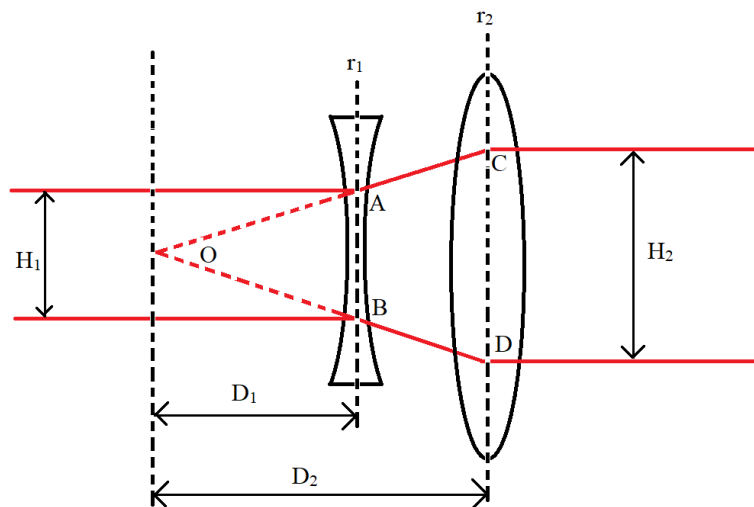
答：同「實驗原理 5」、「實驗原理 6」，參考下二圖，令前透鏡物距為  $S_{o1}$ 、像距為  $S_{i1}$ 、焦距為  $f_1$ ，後透鏡物距為  $S_{o2}$ 、像距為  $S_{i2}$ 、焦距為  $f_2$ ，則若假定雷射為平行光入射，套用高斯公式  $\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f}$  並代入條件  $S_{o1}$  為無窮大，則可知  $S_{i1} = f_1$ ，考慮後透鏡出射光為平行擴束光，故  $S_{i2}$  為無窮大，因此  $S_{o2} = f_2$ ，就以上討論可知，若兩透鏡共焦點，則為一擴束平行系統，故下圖 O 為共焦點，且  $D_1 = S_{i1} = f_1$ ， $D_2 = S_{o2} = f_2$ 。考慮三角形 OAB 與三角形 OCD 為相似三角形，因為兩三角形相似，故可得關係  $H_1 : D_1 = H_2 : D_2$ ，故可得放大倍率  $M_T$  的關係同為

$$M_T = \frac{H_2}{H_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{f_2}{f_1}$$

此外，以上討論也可套用於一凹透鏡與一凸透鏡的情形，僅需考慮凹透鏡焦距為負值。



圖三十一 兩凸透鏡的擴束平行光



圖三十二 一凹透鏡與一凸透鏡的擴束平行光

3. 由「實驗預習 3」得知，雷射的光點半徑會隨傳播距離越遠而越大。請找出一數學式來描述光點的擴散(或發散)角度與最小半徑(beam waist)間的關係。

答：延續自「實驗原理 1」的參數推導，參考下圖，考慮光束半

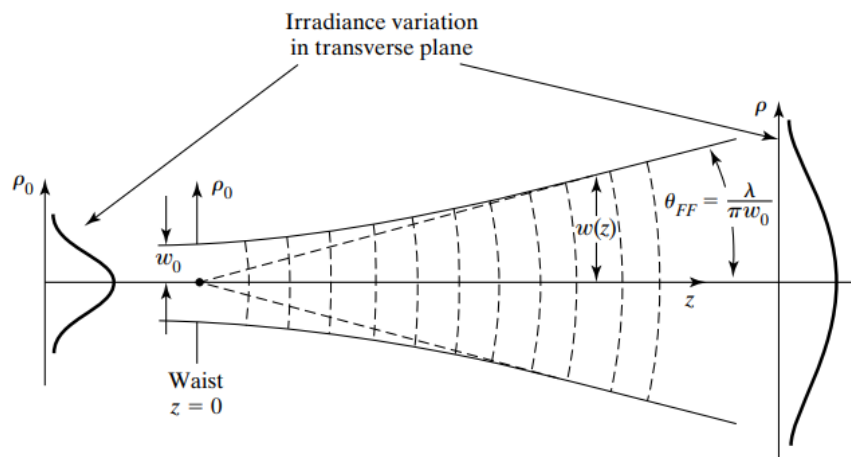
徑  $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$ ，以及瑞立距離  $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ ，將  $z_R$  代入  $w(z)$

中，得  $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2}$ ，考慮在  $z$  相對較大且最小半徑  $w_0$  較

小的情況下， $w(z) \approx w_0 \sqrt{\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2} \approx \frac{\lambda z}{\pi w_0}$ ，且觀察下圖，可得知光點發

散角度  $\tan \theta_{FF} = \frac{w(z)}{z}$ ，考慮  $\theta_{FF}$  為小角度，故可套用正切函數的小角

度近似，得  $\theta_{FF} = \frac{w(z)}{z} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$ ，即為發散角度與最小半徑間的關係式。



圖三十三 高斯光束之擴散角度推導[2]

### (3) Q&A 題目作答

1. 比較與討論「實驗內容 2」、「實驗內容 3」、「實驗內容 4」所得到的三種擴束平行光。

答：上述三個實驗所用透鏡規格為物鏡焦距 15.8mm，105A 凸透鏡焦距 150mm，108A 凸透鏡焦距 250mm，103B 凹透鏡焦距 -100mm。

而三個實驗的實驗結果如下：



表十三 實驗內容 2 之實驗數據

物鏡焦距 (mm)	凸透鏡焦距 (mm)	兩元件之間距 (mm)	理論間距 (mm)	元件間距 誤差(%)
15.8	150	152	165.8	8.323

表十四 實驗內容 2 之實驗數據

入射擴束平行光系統前 的雷射光點直徑(mm)	成像光點直 徑(mm)	量測 倍率	理論 倍率	放大倍率誤差(%)
2.1	20.1	9.57	9.49	0.843

表十五 實驗內容 3 之實驗數據

凸透鏡 1 焦距 (mm)	凸透鏡 2 焦 距(mm)	兩元件之間距 (mm)	理論間距 (mm)	元件間距 誤差(%)
150	250	413	400	3.25

表十六 實驗內容 3 之實驗數據

入射擴束平行光系統前 的雷射光點直徑(mm)	成像光點直 徑(mm)	量測 倍率	理論 倍率	放大倍率誤差(%)
2.1	3.5	1.67	1.67	0

表十七 實驗內容 4 之實驗數據

凹透鏡焦距 (mm)	凸透鏡焦距 (mm)	兩元件之間距 (mm)	理論間距 (mm)	元件間距 誤差(%)
-100	150	54	50	8

表十八 實驗內容 4 之實驗數據

入射擴束平行光系統前 的雷射光點直徑(mm)	成像光點直 徑(mm)	量測 倍率	理論 倍率	放大倍率誤差(%)
2.1	3.2	1.52	1.5	1.34

經由實驗數據可知，透過不同焦距的透鏡組成擴束平行光系統，

可以得到不同的放大倍率  $M_T = \frac{f_2}{f_1}$ 。且可得以下關係：

放大倍率：實驗內容 2 > 實驗內容 3 > 實驗內容 4。

且由於是由同一雷射進行擴束，故三個實驗中，擴束光束的截面積總能量應相同，因此擴束光束的單位面積之光功率應與擴束光束的面積成反比，與直徑成平方反比。

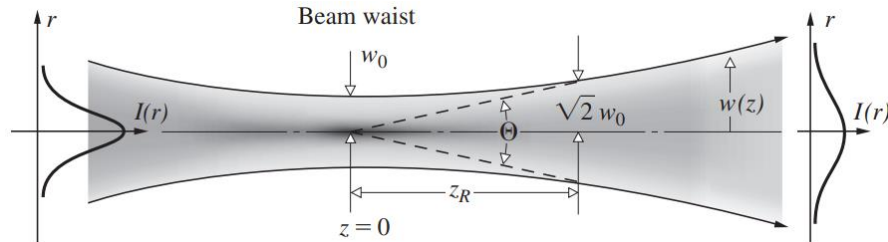
單位面積功率：實驗內容 4 > 實驗內容 3 > 實驗內容 2。

最後考慮兩元件之間距  $D = f_1 + f_2$ 。

兩元件之間距：實驗內容 3 > 實驗內容 2 > 實驗內容 4。

此外，透過表十五和表十七可發現，兩元件的間距皆較理論值大，其可能是因為雷射本就非理想平行光束，如下圖。在入射進透鏡時，雷射傳播距離已超過光腰束位置，故開始略為發散。若將入射與出射第一面透鏡的光路定義為  $r_1$ ，入射與出射第二面透鏡的光路定義為  $r_2$ ，則在兩種情形下的  $r_1$  之物距  $S_{o1}$  皆不為無窮大，根據高斯公式  $\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f}$  可得知， $S_{i1} = \frac{1}{\frac{1}{f_1} - \frac{1}{S_{o1}}}$ ，若  $S_{o1}$  不為無窮大，則  $S_{i1}$  實際值較理論值  $S_{i1} = f_1$  大，假定通過擴束系統後的光束為理想平行光，則  $r_2$  之物距  $S_{o2}$  等於焦距  $f_2$ ，又因兩元件間距等於  $r_1$  之像距  $S_{i1}$  加上  $r_2$  之物距  $S_{o2}$ ，故兩元件間距實際值比理想上的兩透鏡焦距相加較大。

另外，可發現實驗內容 2 的實際元件間距較理論間距小，其可能是因為量測距離為物鏡鏡筒前緣至後方透鏡距離，而非物鏡鏡片至透鏡距離，也有可能是因為物鏡內含兩片鏡片，而物鏡之焦距為兩片物鏡內鏡片組合的等效焦距，故非量測距離。



圖三十四 高斯雷射之光腰束示意圖[1]

2. 比較與討論「實驗內容 4」與「實驗內容 5」兩種量測方法所得之擴束平行光結果。

答：在「實驗內容 4」中，是以肉眼直接觀測擴束光束與原雷射在屏幕紙張上的光點大小，此方法一般是觀測光點在肉眼完全消失的部分做為分界，而在「實驗內容 5」中，則是利用光度計與刀口法測量，因此計算得出的  $w(z)$  為光束半徑，定義為幅照度降到  $1/e^2$  (約為 13.534%) 的部分，兩者相比，利用刀口法測得之光束直徑應較肉眼測得直徑小，且因有精確定義，故理論上較為準確。

但是在實際操作上，肉眼讀值的不確定性可能會對實驗結果有所偏頗，導致採用較為符合理論值的數據點，而利用刀口法則需逐一量測數據，直至最後擬合計算時才可得知結果，故肉眼讀值在數據的讀

取上可能使得結果較接近理論值。

此外，刀口法也易受到環境與儀器的影響，例如精密雙軸平台是能否夠精確的移動刀片、光度計在量測時是否未受外界光干擾，以及在使用光度計量測時，光度計數值易有劇烈浮動，此時在數據的讀取上也易影響到後續光束半徑的計算結果。

倘若能將刀口法量測時的儀器誤差、環境干擾降低，則刀口法理應比直接肉眼觀測更為準確，而理論上，由於在兩個實驗內容中是使用相同的擴束系統，故兩種量測方式都應能與理論值契合。

而在實驗數據中，肉眼觀測所得之原雷射光點直徑為 2.1mm，擴束光束直徑為 3.2mm，放大倍率為 1.52 倍，誤差為 1.334%。刀口法所得之雷射光點直徑為 1.6544mm 與 1.6288mm，擴束光束直徑為 2.9354mm 與 2.8274mm，最接近理論值 1.5 倍之放大倍率為 1.709，誤差為 13.933%，與理論值相差最大之放大倍率為 1.8022 倍，誤差為 20.147%，其可能受到以上討論之影響，故導致刀口法較肉眼觀測誤差較大。

3. 當利用不同焦距的透鏡來聚焦同一平行光束，是否聚焦點的大小為一致？

答：不同，考慮近軸光學下的薄透鏡公式，即高斯公式  $\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} =$

$\frac{1}{f}$ ，在高斯光束下，折射情形將變為下圖三十五，而公式將修改為：

$$\frac{1}{S_o + \frac{Z_{R,o}^2}{S_o - f}} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f}$$

如圖，可發現高斯光束入射薄透鏡後會以另一高斯光束出射，並且有著不同的參數，如瑞立距離、光腰半徑等，其中由於高斯光束在遠離  $Z_R$  的位置可視為自光腰束中心位置發散的直線，故可將物距  $S_o$  與像距  $S_i$  定義為入射光束的軸向距離  $Z_o$  與出射光束的軸向距離  $Z_i$ ，因此公式可改為：

$$\frac{1}{Z_o + \frac{Z_{R,o}^2}{Z_o - f}} + \frac{1}{Z_i} = \frac{1}{f}$$

同理，也可透過出射光性質推得入射光束：

$$\frac{1}{Z_o} + \frac{1}{Z_i + \frac{Z_{R,i}^2}{Z_i - f}} = \frac{1}{f}$$

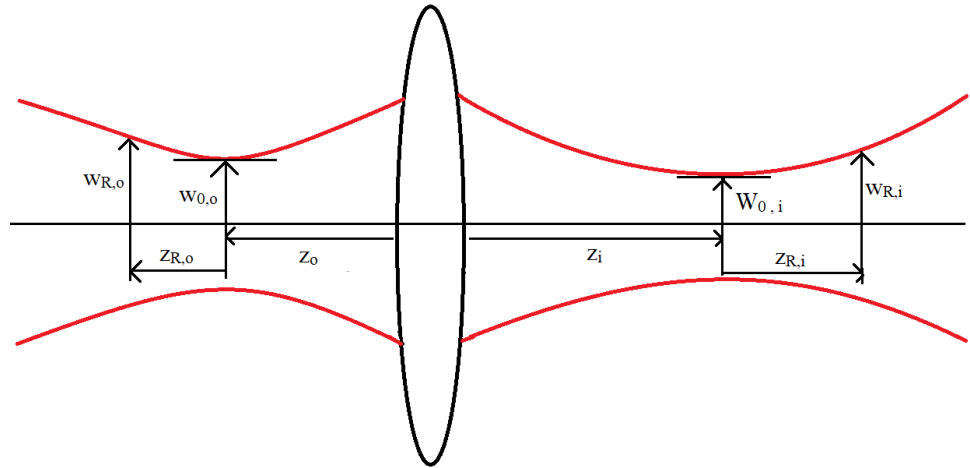
而光束的放大倍率  $M_T$  為：

$$M_T = \frac{W_{0,i}}{W_{0,o}} = \left| \frac{f}{Z_o - f} \right| \left( 1 + \left( \frac{Z_{R,o}}{Z_o - f} \right)^2 \right)^{-1/2}$$

透過近似與關係代換後可得：

$$W_{0,i} = \frac{f\lambda}{\pi W_{0,o}}$$

因此透過上式可知，高斯光束在通過薄透鏡的放大倍率與焦距  $f$  相關且呈正比，因此若以同一光束入射不同焦距的透鏡，上式變量即為焦距  $f$ ，因此測量所得之出射光束的束腰半徑  $w_{0,i}$  將與焦距成正比。



圖三十五 高斯雷射的薄透鏡折射示意圖

4. 本實驗所使用的方法是否可以用來縮小光點的直徑？請試以量化的方式解釋之。

答：可以，因為放大倍率  $M_T = \frac{f_2}{f_1}$ ，假若將焦距較大的透鏡置於前方，為  $f_1$ ，並將焦距較小的透鏡至於後方，為  $f_2$ ，則  $M_T$  小於一，即為縮小平行光束。

此外，與擴束平行光束相比，縮小平行光束的系統中，兩透鏡距離同樣為  $D = f_1 + f_2$ 。

若以此實驗所使用之透鏡組合縮小光點直徑，並改變擺放順序，則實驗內容 2 之縮小倍率將為 0.1053 倍，實驗內容 3 之縮小倍率為 0.6 倍，實驗內容 4 之縮小倍率為 0.6667 倍。

#### (4) 實驗結果討論

這次實驗將高斯光束的雷射入射擴束平行系統，得一平行的擴束出射光束，而透過不同透鏡組合得不同放大倍率，並利用肉眼量測以及刀口法驗證光束放大倍率。

而在實驗結果中，可發現實驗內容 3 與實驗內容 4 的元件間距誤差分別為 3.25% 與 8%，且實際量測值較理論值大，其可能是因為入射光束並非完美平行光束，而為高斯光束，而高斯光束在光腰束後會略為發散，導致間距增大。以及當量測距離時，由於透鏡仍具有厚度，並且透鏡是裝在透鏡環中，因此易發生人為量測誤差。而此外實驗內容 2 的元件間距誤差為 8.323%，且實際量測距離較理論值小，其可能是因為物鏡的透鏡位於物鏡套筒中，而其透鏡位置與量測距離時的物鏡定義位置不同，也有可能是因為物鏡內採用兩片透鏡，而物鏡焦距實際為 2 片透鏡的等效焦距，因此與量測位置不同。

而針對刀口法量測，可發現在擴束平行光束的  $\Delta I$  圖(圖十五與圖十七)中，2 次的量測在刀片位移為 1.8 至 2mm 的位置皆有明顯誤差(曲線凹陷)，不符合高斯曲線分佈，而觀察移除透鏡組後的刀口法量測，可發現原雷射光束的  $\Delta I$  圖(圖十九與圖二十一)皆沒有此缺陷，因此可合理推論該位置為透鏡自身缺陷，可能在透鏡上的相關位置有髒汙或者鏡片損傷，導致該位置的光無法正常折射到點上，導致量測誤差。

而比較刀口法與肉眼量測所得的放大倍率，可知針對同一擴束系統，肉眼量測的誤差約為 1.334%，而刀口法所得之誤差約為 14% 至 20% 間，理論上，刀口法之誤差應比肉眼量測更小，而導致刀口法誤差的來源可能來自外來光源干擾、光度計浮動時的數據讀取、精密雙軸平台的儀器誤差等，以上皆有可能導致刀口法在量測時較肉眼觀測有著其他來源的誤差，而肉眼觀測時，由於是主觀判斷光點完全消失的位置，因此我們不能否認在取值上可能帶有主觀意識使得數據點較接近理論值，也因此肉眼觀測的數據可能比刀口法更小，此外，透過多次刀口法的量測，可發現各組數據間差異並不大，因此更有可能是因為由於刀口法量測與肉眼觀測的擴束平行光束系統並非同一次架設，有可能在使用肉眼觀測時建立的系統本身即較接近理想位置，而使用刀口法時所建立的系統並不足夠理想，因此導致使用刀口法量測的數據皆有明顯誤差，但數據本身差異不大，其即是因為擴束平行系統本身建立的不夠理想。

## 五、參考資料及文獻：

- [1] Eugene Hecht, *Optics*, 5th ed. (Pearson Education, 2017) , Chapter 13.1.3, pp.619-627.
- [2] Frank L. Pedrotti , Leno S. Pedrotti , Leno M. Pedrott , *Introduction to Optics* , 3th ed. (Addison-Wesley , 2006) , Chapter 27, pp.583-605.
- [3] 楊榮輝，” 雷射系統動力學研究 從混亂無序到類似周期性弛張振盪” ，13 頁至 24 頁，2010 年。
- [4] Eugene Hecht, *Optics*, 5th ed. (Pearson Education, 2017) , Chapter 5.7.7, pp.230-235.
- [5] 邱泳倫，” 雷射光束品質量測系統之開發與研究” ，14 頁至 15 頁，2013 年。
- [6] 熊小华，” 刀口法測量高斯光束腰斑大小实验设计” ，*南昌航空工业学院学报*，第 14 卷第 3 期， 2000 年 9 月。